

LA GRAVITATION UNIVERSELLE

Daniel WOERHLING

Ce fascicule retrace les grandes étapes scientifiques qui ont mené de la découverte de la chute des corps par Galilée à l'élaboration de la théorie de la gravitation universelle par Newton. Il met en lumière l'émergence de la méthode expérimentale, fondement de la science moderne, qui privilégie l'observation et l'expérimentation sur les spéculations abstraites. Cette méthode révolutionne la connaissance en permettant de construire les lois à partir des faits naturels.

Daniel Woehrling dans ce livret, s'intéresse à l'importance du principe d'inertie, issu de l'étude du mouvement des corps en chute, qui constitue la base de toute la physique mécanique newtonienne. La théorie de Newton marque l'unification de la physique terrestre et céleste, donnant naissance au premier grand système scientifique du monde. Le fascicule est structuré en deux parties : la première va de Galilée au principe d'inertie, la seconde du principe d'inertie à la gravitation universelle.



SOCIÉTÉ
d'ASTRONOMIE
de NANTES

Société Scientifique d'Éducation Populaire agréée Jeunesse et Sports
35, boulevard Louis Millet - 44300 NANTES - Tél. 02 40 68 91 20 - Fax 02 40 93 81 23
Internet : www.san-fr.com - E-mail : san@san-fr.com



N° 7

LA GRAVITATION UNIVERSELLE

Daniel WOERHLING



Les Cahiers de la SAN

LA GRAVITATION UNIVERSELLE

Daniel WOEHLING

Édition 2011

La Société d'Astronomie de Nantes

Résolument tournée vers le grand public, la SAN vous propose de découvrir l'astronomie ou d'approfondir vos connaissances dans ce domaine de multiples façons :

- Assister aux exposés d'astronomie présentés lors des réunions du vendredi soir, ouvertes à tous les adhérents, au local de la Société à partir de 20h30.
- Consulter ou emprunter l'un des mille ouvrages que possède le fonds bibliothécaire.
- Participer aux observations de découverte ou de perfectionnement. Vous pouvez également emprunter un instrument.
- Assister aux conférences au cours desquelles des astronomes et astrophysiciens de renom viennent présenter les derniers acquis de leurs travaux.
- Solliciter la SAN pour animer des actions pédagogiques préparées à l'attention de public scolaire ou adulte.
- Visiter les expositions auxquelles la SAN participe régulièrement.
- Apporter votre contribution à la réalisation de travaux pratiques d'astronomie tels que la mesure de la masse de Jupiter ou l'évaluation des altitudes des reliefs lunaires.
- Réfléchir et débattre des grands thèmes de la physique, de l'astrophysique et de la science en général au sein d'un groupe de réflexion théorique.
- Enfin, l'astronomie nécessitant des connaissances et des compétences multiples (en optique, mécanique, électronique, etc.), offrir un peu de votre temps pour la conception ou à la réalisation de projets astronomiques.

Pour participer à ces activités, il vous suffit de devenir adhérent.

La Société d'Astronomie de Nantes est une association fondée en 1971 et régie par la loi de 1901.

Les « **Cahiers de la SAN** » sont édités par la Société d'Astronomie de Nantes,
Société Scientifique d'Éducation Populaire agréée Jeunesse et Sports.

35, boulevard Louis-Millet
44300 NANTES

Tél. 02 40 68 91 20 - Fax 02 40 93 81 23 - E-mail : san@san-fr.com

© Toute reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans l'autorisation de la Société d'Astronomie de Nantes, est interdite.

Épilogue

La théorie de la Gravitation universelle consacra le triomphe de la physique mécaniste et continue aujourd'hui à être opérationnelle, notamment dans les calculs d'orbite ou les trajectoires de sondes spatiales. Elle montre aussi, d'une manière simple, comment l'Homme parvient à dépasser la physique terrestre par la méthode expérimentale, le raisonnement et l'observation, et étendre ainsi considérablement par les sciences son domaine d'investigation.

C'est selon ce même principe que l'Astronomie, science de l'infiniment grand, est possible ; mais les théories actuelles, aussi séduisantes ou solides qu'elles paraissent, doivent se soumettre, comme ce fut le cas pour celle de la gravitation, à l'épreuve sans appel de la réalité observée.



Daniel WOEHLING, 1988, 1993
(3^e édition revue et augmentée, 1995)

Préface

De la chute des corps à la gravitation universelle, ou l'émergence de la première grande théorie physique marquant les débuts de la période scientifique moderne.

Ce fascicule résume les principales étapes qui conduisirent de la découverte de la loi de la chute des corps par GALILÉE à la théorie de la Gravitation universelle, à laquelle demeure à jamais attaché le nom de NEWTON. La première correspondait à l'avènement de la méthode expérimentale, base de la science moderne, la seconde constitue un véritable monument de la physique mécanique et la première grande théorie proposant un système du monde basé sur la science, accomplissant l'union de la physique terrestre et de la physique céleste.

Cette phase de l'histoire des sciences demeure passionnante car elle correspond à l'émergence d'un principe de connaissance radicalement nouveau et qui allait démontrer par la suite sa redoutable fécondité : la *méthode expérimentale*, qui consiste non plus à projeter sur le monde les constructions abstraites de la pensée humaine, mais au contraire à tenter de les élaborer à partir des réponses que ce dernier nous livre pour peu qu'on sache l'interroger. Les théories ne sont pas imposées aux faits mais produites à partir des lois naturelles.

La fabuleuse histoire de la théorie de la Gravitation universelle prend son point de départ dans l'étude d'un mouvement naturel, la chute des corps, dont la loi est ses prolongements conduisent à la clé de voûte de tout le système : le *Principe d'inertie*. Ce fascicule présente ainsi deux parties, la première, la plus importante, allant de la chute des corps au principe d'inertie, la seconde allant du principe d'inertie à la théorie de la Gravitation universelle.



$9,81 = 6,67 \times 10^{-11} \times (M \times 1) / (6400 \times 1000)^2 \Rightarrow M = (9,81 \times 6400^2 \times 10^6) / (6,67 \times 10^{-11})$; d'où $M \approx 6 \times 10^{24}$ kg (6000 milliards de milliards de tonnes).

- Ainsi, le Soleil (masse $\approx 2 \times 10^{30}$ kg) et la Terre, distants de 150 millions de km, s'attirent avec une force de $6,67 \times 10^{-11} \times (6 \times 10^{24} \times 2 \times 10^{30}) / (150 \times 10^9)^2$ N $\approx 36 \times 10^{21}$ N (3,6 milliards de milliards de tonnes).

5 m / 3600 soit 1,36 mm. Or, on peut calculer qu'effectivement, la Lune s'écarte chaque seconde très exactement d'une telle distance par rapport à la ligne droite.

Formulation de la loi

Ainsi donc, tous les corps semblent s'attirer dans la nature : la force de gravitation est *universelle* (c'est-à-dire supposée s'étendre à tout l'« univers »). Bien plus, c'est la première grande loi simple qui unifie la physique terrestre et la physique céleste. Deux masses m et m' situées à la distance d l'une de l'autre s'attirent avec une force F proportionnelle à mm'/d^2 ; on a $F = Gmm'/d^2$ avec $G = 6,67 \times 10^{-11}$, soit $F = 6,67 \times 10^{-11} \times mm'/d^2$ lorsque m et m' sont exprimés en kg et d en mètres).

- *Exemple 1* : 2 masses de 1 kg situées à 1 m l'une de l'autre s'attirent avec une force de $6,67 / 100\,000\,000\,000$ N soit $0,000\,000\,000\,006\,67$ kg ou $0,000\,006\,67$ mg (environ 7 millièmes de mg). À 1 mm (une distance mille fois plus petite), cette force est un million de fois plus grande, soit $0,000\,006\,67$ kg soit $6,67$ mg.
- *Exemple 2* : 2 masses d'une tonne distantes de 1 cm s'attirent avec une force de $6,67 \times 10^{-11} \times (1000 \times 1000) / 10^{-4} = 0,667$ N soit environ $0,0667$ kg ou $66,7$ g. À 1 m (100 fois plus loin), cette force est divisée par 10 000 et égale à environ 7 mg ; à 1 mm, elle est multipliée par 100 et égale à environ $6,67$ kg.
- *Exemple 3* : 2 cubes rocheux (densité : $5,5$ kg / dm³) de 10 m de côté et distants de 1 m, s'attirent avec une force de 200 kg ; à 10 m, de 2 kg.

On peut aussi calculer la masse M de la Terre puisqu'on connaît son rayon (environ 6400 km) et la force (le poids) – égal à $9,81$ N – qui attire une masse de 1 kg située à sa surface :

Table des Matières

De la chute des corps au principe d'inertie	7
Établissement de la loi de la chute des corps par Galilée ..	7
Le principe d'inertie	17
Du principe d'inertie à la théorie de la gravitation universelle	22
Explication du mouvement des planètes	22
Hypothèse de la Gravitation universelle	23
Formulation de la loi	24
Épilogue	26
Notes personnelles	27

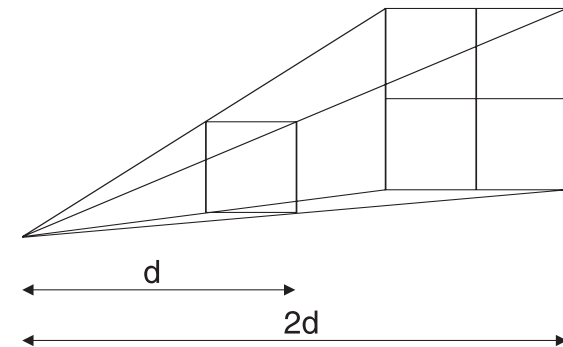


Fig. 13. Diminution de la force de gravitation en raison inverse du carré des distances

NEWTON montra que l'accélération qui résultait de cette force s'affaiblissait avec l'inverse du carré de la distance au Soleil. De même un flux de particules (photons par exemple) est 4 fois moins important à la distance $2d$ qu'à la distance d de la source (fig. 13).

Hypothèse de la Gravitation universelle

Puisque la force d'attraction (de « gravitation ») entre les corps semble s'étendre partout dans l'univers, elle expliquerait peut-être aussi la chute des corps, qui pourrait être due à l'attraction exercée par la Terre sur les corps situés à sa surface.

Ainsi, si c'est la même force de pesanteur qui attire la Lune vers la Terre et qui est responsable de la chute des corps, alors on devrait trouver que l'accélération qu'elle occasionne décroît selon l'inverse du carré de la distance.

Comme les corps, à la surface de la Terre (situés à environ 6400 km de son centre) tombent de 5 m au cours de leur première seconde de chute ($D = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9,81 \times 1^2 \approx 5 \text{ m}$), la Lune, située à environ 60 fois le rayon terrestre de ce même centre, devrait être soumise à une accélération égale à $g/60^2 = g/3600$ (les accélérations sont proportionnelles aux distances parcourues pendant un temps donné) et « tomber » d'environ

Du principe d'inertie à la théorie de la gravitation universelle

La formulation du Principe d'inertie va conduire à la théorie de la Gravitation universelle.

Explication du mouvement des planètes

Rappel : d'après le principe d'inertie, lorsque la résultante des forces appliquées à un corps est nulle (ou en l'absence de toute force), le corps est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

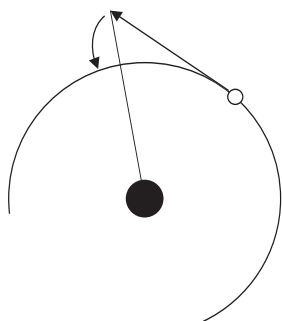


Fig. 12. Le mouvement circulaire des planètes trahit l'existence d'une force qui les dévie d'une trajectoire rectiligne uniforme due à l'inertie

Conséquence : toute modification de vitesse, soit en grandeur, soit en direction (c'est à dire toute accélération) est due à une force, c'est-à-dire que toute modification de trajectoire par rapport à la ligne droite est le signe de l'action d'une force.

Donc, les planètes sont soumises à une force puisque leur trajectoire n'est pas rectiligne, mais circulaire (en fait, légèrement elliptique). La modification de leur trajectoire par rapport à la ligne droite correspond à une modification de la vitesse en direction du Soleil : la planète subit donc une accélération de même direction, due à une force dirigée vers le Soleil. Littéralement, elle « tombe » en permanence vers le Soleil (fig. 12).

On peut calculer cette force centripète connaissant la masse m de la planète, sa vitesse radiale v sur son orbite (d'après la période de révolution) et le rayon R de l'orbite, à l'aide de la formule $F = mv^2/R$ ($\gamma = v^2/R$).

LA GRAVITATION UNIVERSELLE

De la chute des corps au principe d'inertie

Établissement de la loi de la chute des corps par GALILÉE

L'expérience commune nous apprend que les corps tombent. Mais de quelle façon ? L'ancienne physique disait que les corps lourds tombent vers le bas, les corps légers vers le haut. Au juste, personne ne savait *comment* les corps tombaient.

En décrivant ce « comment », GALILÉE allait d'abord démontrer que tous les corps, quel que soit leur poids, tombent de la même façon, contredisant déjà une idée reçue qui veut qu'intuitivement, les corps lourds tombent plus vite : c'est l'expérience fameuse des deux boulets, l'un en fonte, l'autre en bois qui, lâchés du haut de la tour de Pise, atteignent le sol en même temps (fig. 1), contrairement à ce qu'enseignait l'ancienne physique d'ARISTOTE.*

C'est là un bon exemple de l'objet de la science qui est de *décrire* les phénomènes (le « comment ») avant que de s'attacher à en rechercher la « raison » (le « pourquoi »).

* La référence à la célèbre tour de Pise est probablement une légende et GALILÉE aurait tout simplement reproduit cette expérience dans son cabinet.

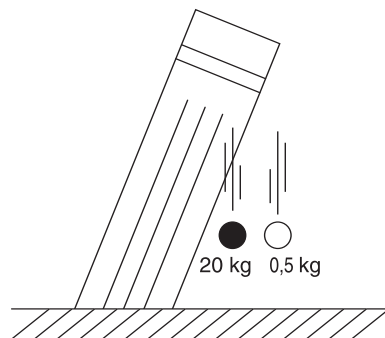


Fig. 1. L'expérience de GALILÉE :
les corps tombent à la même vitesse quel que soit leur poids

C'est de la description de la banale chute des corps qu'allait émerger l'une des lois fondamentales de la mécanique : le *Principe d'inertie*, sans lequel la théorie de la gravitation universelle n'aurait pu voir le jour.

Comme toujours, l'établissement d'une loi commence par la formulation d'une *hypothèse* que l'on teste, elle ou ses conséquences.

Ce test consiste en une *expérience*, conçue comme une question, dont la réponse permet de confirmer ou d'infirmer l'hypothèse. Dans le cas où elle est confirmée, l'hypothèse mène à une loi naturelle. Assez rapidement, s'est imposée la formulation mathématique, synthétique et commode ; les lois se présentent ainsi de nos jours sous forme d'*équations* (ou « *formules* »).

Dans le cas de la chute des corps, la loi la plus simple sera trouvée en testant l'une des conséquences de l'hypothèse suivante : la vitesse v des corps qui tombent augmente de manière régulière (linéaire) avec le temps t : *le mouvement des corps en chute libre est uniformément accéléré* (on dit encore « uniformément varié ») et l'on écrit : $v = k \times t$. Le coefficient k est appelé *accélération* (encore notée g).

Celle-ci, dans le cas de la chute des corps, est constante et notée « g ». De ce fait, $v = gt$. Il en résulte mathématiquement que les distances D parcourues en des intervalles de temps égaux

temps t) ; c'est encore l'expérience de GALILÉE lâchant différents objets du haut de la tour de Pise et constatant qu'ils atteignent le sol en même temps (voir fig. 1).

Il pourrait paraître surprenant à première vue qu'une masse de 20 kg, par exemple, atteigne le sol en même temps qu'une autre de 100 g. Il en est pourtant ainsi, du moins si on néglige la résistance de l'air, laquelle dépend de la vitesse (voir plus haut) et de la forme de l'objet (dans le vide, une plume tombe aussi rapidement qu'une bille de plomb).

Cela vient du fait que l'attraction que les objets subissent de la part de la Terre est proportionnelle à leur masse. Si la force (pesanteur) qui les « tire » vers le bas était constante, l'accélération prise par les corps en chute libre serait plus faible pour ceux dont la masse est petite que pour les corps très massifs, et leur vitesse de chute serait plus faible au bout du même temps ; mais comme la pesanteur est proportionnelle à la masse, les corps sont « tirés vers le bas » avec une force d'autant plus grande qu'ils sont plus massifs (fig. 11).

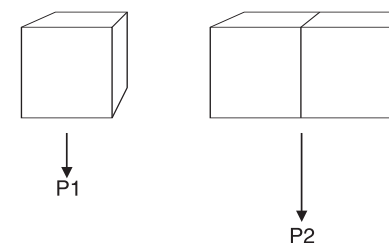


Fig. 11. L'objet 2 fois plus lourd (à droite) ne tombe pas 2 fois plus vite car il est aussi 2 fois plus massif, et son inertie est 2 fois plus grande. En fait, il tombe à la même vitesse que l'autre objet parce que la force qui le tire vers le bas (son poids P_2) est 2 fois plus grande que pour le premier.

Ainsi, tous les corps en chute libre prendront en définitive la même accélération (un corps n fois plus massif est attiré n fois plus, mais chaque unité de masse étant attirée par la même force, elles prendront toutes la même accélération).

Masse et poids

La masse, dépendant uniquement pour un corps donné de la quantité de matière qu'il recèle, demeure identique en toutes circonstances et constitue une grandeur caractéristique du corps, considérée comme invariable, du moins en physique classique (pour des vitesses petites devant celle de la lumière) ; la masse d'un objet constitue ainsi un *invariant* en physique mécanique. En particulier, elle est la même sur n'importe quelle planète. La notion de *masse* doit ainsi être distinguée de celle de *poids* qui désigne la *force* avec laquelle cette masse est attirée, par exemple par la Terre.

- *Exemple* : sur la Lune, où les objets pèsent environ 6 fois moins que sur Terre, il faut autant de force que sur Terre pour mettre un objet en mouvement (par exemple pousser une voiture).

Le poids d'un corps est en fait une *force d'attraction* liée à sa masse et uniquement du fait de la présence d'une autre masse à proximité. Le poids est donc variable pour une masse donnée, car dépendant de l'importance et de la distance de l'autre masse (voir ci-dessous).

La Terre, par exemple, exerce sur les corps placés à sa surface, une force d'attraction proportionnelle à leur masse, qu'on appelle *poids*, symbolisé par P . Comme au cours de leur première seconde de chute, les corps à la surface de la terre parcourent environ 5 m, l'accélération due à la pesanteur (qu'on symbolise par g pour la distinguer du symbole γ) vaut $(2 \times 5) / \sqrt{1^2}$ (on applique la loi du mouvement uniformément accéléré), soit environ 10 m/s² (9,81 exactement). On dit que l'accélération de la pesanteur est égale à 10 m/s² ou 10 ms⁻². On écrit $P = m \times g$ ou $P = mg$. Les masses s'expriment généralement en kg, les forces (c'est-à-dire aussi les poids), en Newtons (N). Ainsi, le *poids* d'un corps de *masse* 1 kg est égal à 1 x 9,81 = 9,81 N.

Tous les corps qui tombent à la surface de la Terre, quelle que soit leur quantité de matière (masse), prennent la même accélération g : les corps lourds et les corps légers tombent ainsi « à la même vitesse » (ont la même vitesse au bout du même

augmentent de manière linéaire comme le carré du temps t écoulé : $D = k' \times t^2$. C'est cette dernière proposition qui sera testée, la mesure des distances parcourues par un corps dans des intervalles de temps constants étant un autre moyen de mesurer les vitesses et les accélérations.

Avant de poursuivre, démontrons qu'il en est bien ainsi, c'est-à-dire que si un mobile est soumis à une accélération constante, la distance parcourue augmente comme le carré du temps mis à la parcourir.

Pour cela, il est nécessaire de revenir à ce que l'on nommait autrefois le « théorème de la vitesse moyenne ». La démonstration qui suit est géométrique, ce qui présente deux intérêts par rapport aux démonstrations algébriques employées aujourd'hui : d'abord le caractère historique (les démonstrations se faisaient autrefois préférentiellement par la géométrie, ressentie comme un art mathématique supérieur), ensuite l'évidence des démonstrations (on a pu dire que les démonstrations algébriques « contraignaient » l'esprit sans véritablement convaincre).

Théorème de la vitesse moyenne

a) *Cas du mouvement uniforme (mouvement à vitesse constante)*

La vitesse est, par définition, la distance parcourue par unité de temps : la distance parcourue au bout du temps t à la vitesse v est ainsi égale à $v \times t$.

- *Exemple* : après 2 heures à la vitesse de 30 km/h on a parcouru au total 30 km x 2 = 60 km, soit le nombre de kilomètres parcourus par heure multiplié par le nombre d'heures.

Remarque : en physique, les durées s'expriment plutôt en secondes (s), les distances en mètres (m) et les vitesses en mètres par seconde (m/s ou ms^{-1}).

Représentation géométrique (fig. 2) : si l'on met la durée en abscisse et la vitesse en ordonnée, la distance parcourue au bout du temps t est représentée par l'aire située sous la droite.

Dans la figure 2, l'aire de deux petits rectangles superposés représente la distance parcourue par unité de temps (ici, la seconde), et vaut 2 m. Au bout du temps t , la distance parcourue, égale à $v \times t$, représente l'aire d'un rectangle de largeur v et de longueur t .

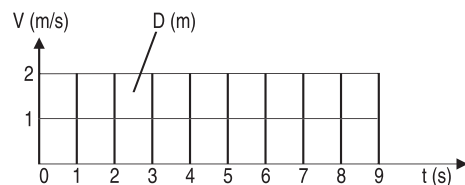


Fig. 2. La distance parcourue est représentée par la somme des aires élémentaires (petits rectangles). Dans cet exemple, le mobile est animé d'une vitesse constante égale à 2m/s

b) Cas du mouvement uniformément accéléré

Dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, cette représentation demeure valable et permet de calculer la distance totale parcourue dans le cas où la vitesse est variable.

Accélérations discrètes

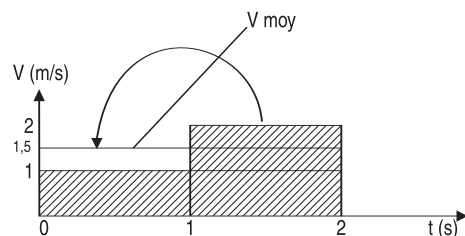


Fig. 3. La distance parcourue à vitesse variable (somme des carrés grisés) est identique à celle parcourue à une vitesse constante égale à la vitesse moyenne (mobile dont l'accélération augmente de 1m/s chaque seconde de manière discrète, c'est-à-dire par paliers)

Pour simplifier, considérons d'abord une accélération discrète (la vitesse augmente de manière discontinue, par paliers). Dans l'exemple de la figure 3, la distance parcourue

lorsqu'elle freine (accélération négative ou « décélération ») ou encore lorsqu'elle tourne, même si la valeur de la vitesse le long de la trajectoire (vitesse radiale, mesurée en l'occurrence en km/h), reste identique.

L'expérience montre que pour un corps donné, cette accélération est proportionnelle à la force (ou à la résultante des forces appliquées) qui lui a donné naissance, de même sens et de même direction (force, accélération et vitesse sont des grandeurs vectorielles).

Pour des corps de même matière, la force à appliquer pour obtenir une accélération donnée est proportionnelle au volume (exemple : il faut pousser deux fois plus fort une voiture d'une tonne qu'une voiture de 500 kg pour l'amener à la même vitesse au bout d'un temps donné).

Ou encore, pour un corps donné soumis à des forces $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$, l'accélération γ qu'il prend est proportionnelle à ces forces. Le coefficient de proportionnalité mesure en quelque sorte la *quantité de matière* contenue dans le corps, qu'on appelle *masse* (m).

$$F_1/\gamma_1 = F_2/\gamma_2 = F_3/\gamma_3 \dots = F_n/\gamma_n = m.$$

D'où : $F = m \times \gamma$, ce qu'on écrit encore :

$$F = m\gamma$$

Tout se passe encore comme si les corps, du fait de leur masse, s'opposaient aux accélérations, c'est à dire aux modifications de leur mouvement (de leur vitesse), qu'ils soient au repos (vitesse initiale nulle, on écrit : $v_0 = 0$) ou animés d'un mouvement rectiligne uniforme ($v_0 \neq 0$), et ceci en raison directe de leur masse.

Autrement dit, il est d'autant plus difficile de mettre un objet en mouvement, de le freiner ou de modifier sa trajectoire, qu'il contient davantage de matière. Les corps présentent ainsi une inertie proportionnelle à leur masse, d'où le nom de *Principe d'inertie* donné encore à la loi $F = m\gamma$. L'inertie est liée à la masse, laquelle est liée à la quantité de matière.

moderne et l'une des plus importantes généralisations que l'homme ait jamais réalisées. On peut encore dire que le principe d'inertie est au coeur des lois fondamentales de la nature.

Le Principe d'inertie émane de la loi de la chute des corps : en effet, en l'absence de résistance de l'air, la vitesse d'un corps en chute libre augmenterait sans cesse (mouvement uniformément accéléré). Or, la résistance de l'air, qui croît avec la vitesse ($R = k \times v^3$), finit par être égale au poids du corps et contrebalance alors très exactement la pesanteur (fig. 10).

Cependant, le corps continue de tomber, mais cette fois-ci, avec une vitesse uniforme, égale à la vitesse acquise. D'où le principe suivant : **lorsque la résultante des forces appliquées à un corps est nulle** (comme lorsqu'il n'est soumis à aucune force du tout), **ce dernier est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne** (en ligne droite) **et uniforme** (à vitesse constante, c'est-à-dire avec une accélération nulle). C'est le fameux **Principe d'inertie**.

Formulation mathématique

(relation fondamentale de la cinématique)

Puisqu'en l'absence de force, les corps sont au repos ou se meuvent en ligne droite et à vitesse constante, toute modification de vitesse, c'est à dire toute accélération, doit être provoquée par une force. Il en est ainsi d'une mise en mouvement à partir du repos comme d'une modification de la valeur, voire simplement de la direction, de la vitesse.

Mathématiquement, la vitesse est un vecteur, caractérisé par un module (la grandeur ou valeur absolue de la vitesse, symbolisée par la longueur du vecteur), une *direction* (la trajectoire ou plutôt la tangente à cette trajectoire à l'instant t) et un sens (pour une direction donnée, il y a deux sens possibles : « vers l'avant » ou « vers l'arrière »). Toute variation du vecteur vitesse (toute modification de l'une quelconque de ces composantes) constitue une accélération.

- Exemple : une voiture « accélère », au sens physique du terme, non seulement lorsqu'elle va plus vite, mais aussi

(somme des distances parcourues par unité de temps) $D = (1 \times 1) + (2 \times 1) = 3$ m pourrait être calculée en considérant la vitesse comme constante et égale à une vitesse moyenne v_{moy} , égale ici à $(1+2)/2$ soit 1,5 m/s (et $D = 1,5 \times 2 = 3$ m).

La méthode de calcul reste valable lorsque les augmentations de vitesse sont plus nombreuses – après un temps plus important, ou plus rapprochées – (figure 4 et suivantes).

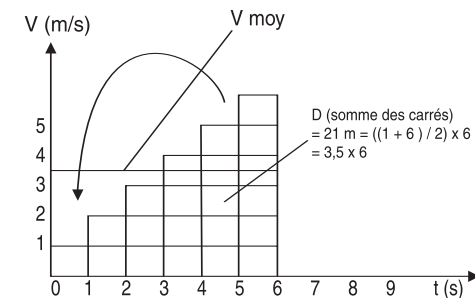


Fig. 4. Distance parcourue lors d'accélération discrètes (suite)

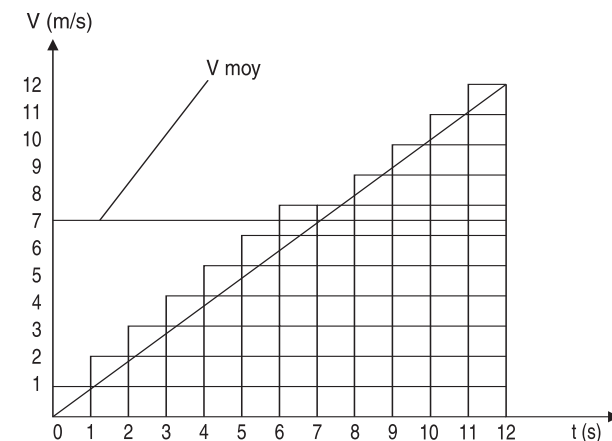


Fig. 5. Lorsque le nombre de paliers augmente, la valeur de la vitesse moyenne v_{moy} se rapproche de la moitié de la vitesse maximale

Dans le cas de la figure 4, la distance parcourue (somme des petits carrés) au bout de 6 secondes, est de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ m, ce que l'on peut également calculer par la formule $(1 + 6) / 2 \times 6$ (somme des termes d'une progression arithmétique). Là encore, l'expression $(1 + 6) / 2$ représente la vitesse moyenne et l'on voit bien que la distance totale parcourue est égale à $v_{moy} \times t$. Dans tous les cas, si v_{min} et v_{max} désignent respectivement la vitesse minimale et la vitesse maximale, v_{moy} est égal à $(v_{min} + v_{max}) / 2$. Plus ces augmentations sont nombreuses (fig. 5 et 6) plus, bien sûr, l'accélération semble uniforme.

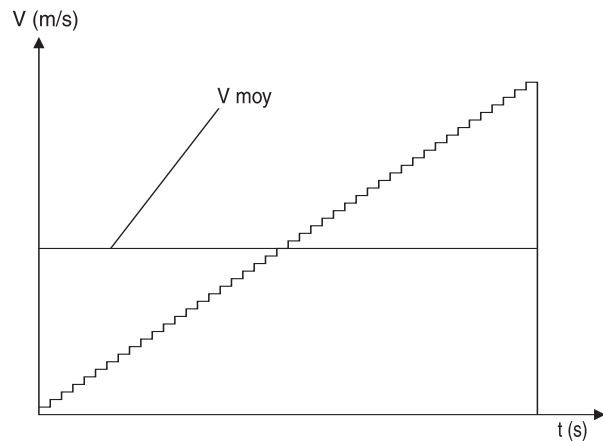


Fig. 6. Une accélération continue peut être considérée comme discrète avec un nombre de paliers infini

Accélération continue

Lorsqu'il y a une infinité d'augmentations de vitesse par unité de temps (fig. 6), ou si les augmentations de vitesse ne se font plus de manière discrète, mais continue (fig. 7), on voit que si le corps part du repos, la vitesse moyenne v_{moy} est égale à la moitié de la vitesse maximale v_{max} (v_{min} est égal à 0) : c'est le « théorème de la vitesse moyenne ».

On voit donc que plus l'accélération, à supposer qu'elle soit constante, se rapproche d'une variation continue, plus la

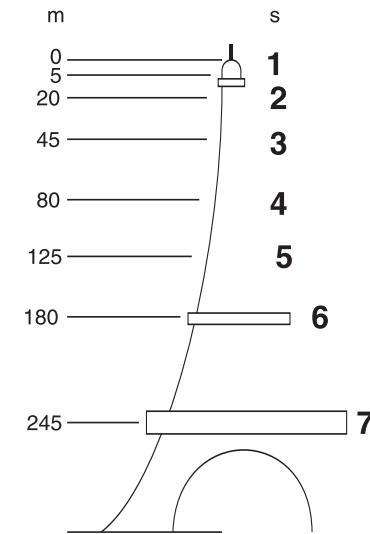


Fig. 9. Distances parcourues par un corps tombant du haut de la Tour Eiffel (les temps sont indiqués en secondes).

Le principe d'inertie

Principe

À la suite de ses observations sur la chute des corps, GALILÉE était presque arrivé à la formulation du principe d'inertie. On peut dire qu'il l'a « frôlé », et il l'aurait établi aisément s'il n'était parti de l'a priori qui voulait qu'à l'époque, le mouvement circulaire, considéré comme parfait, fut le mouvement naturel des corps célestes.

C'est NEWTON qui formula le fameux *Principe* et qui en a tiré toutes les conséquences. Celles-ci sont importantes, puisque le *Principe d'inertie* conduit directement à la *théorie de la Gravitation universelle*, monument de la physique

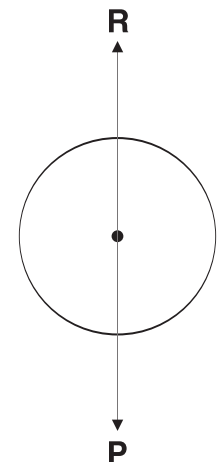


Fig. 10. Chute libre à vitesse constante quand la résistance de l'air R équilibre le poids P

L'accélération γ est ainsi la « pente » de la droite représentant la fonction $v = \gamma t$ (la valeur de cette pente est égale à la tangente de l'angle α que fait la courbe avec l'axe des abscisses).

De même, la fonction « vitesse » $v = \gamma t$ est la primitive de la fonction représentant l'accélération en fonction du temps. Dans le cas d'une accélération uniforme, $\gamma = \text{constante}$ et v (primitive d'une constante) = γt . ■

Application à la chute des corps

Cette conséquence étant démontrée, il suffit de vérifier que, pour les corps en chute libre, les distances parcourues en des intervalles de temps égaux augmentent de manière linéaire comme le carré des temps, pour en déduire que leur mouvement est uniformément accéléré (confirmation de l'hypothèse de départ).

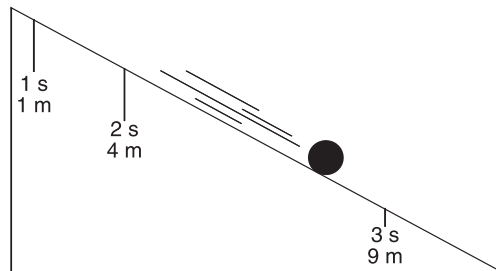


Fig. 8. Démonstration par Galilée du caractère uniformément accéléré du mouvement des corps en chute libre.

Pour cela, GALILÉE a eue l'idée géniale de « diluer » la pesanteur (ce sont ses propres termes), par l'utilisation du plan incliné (fig. 8), ce qui lui permit de mesurer que les distances parcourues en des intervalles de temps égaux étaient bien proportionnelles aux carrés des temps et de valider ainsi son hypothèse.

À titre d'illustration, la figure 9 indique ainsi les distances parcourues par un corps tombant du haut de la tour Eiffel.

vitesse moyenne tend vers une valeur égale à la moitié de la vitesse maximale atteinte (pour un corps partant du repos).

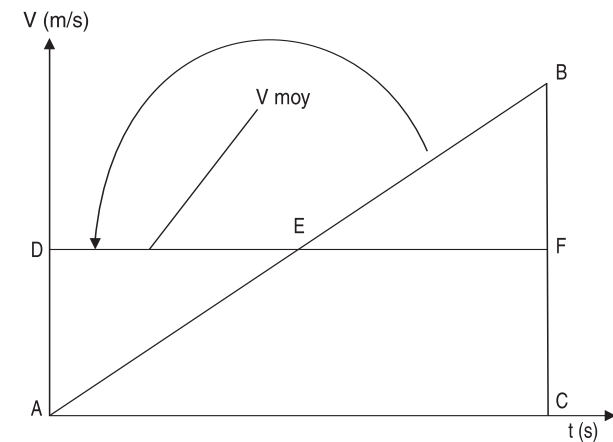


Fig. 7. La distance parcourue (aire du triangle ABC) est égale à celle du rectangle ADFC). La vitesse moyenne est égale à la moitié de la vitesse maximale

Pour un corps partant du repos et subissant une accélération uniforme, la vitesse moyenne est égale à la moitié de la vitesse maximale (théorème de la vitesse moyenne).

Or, la vitesse maximale est égale à l'accélération multipliée par le temps : $v_{\max} = \gamma \times t$ (si la vitesse augmente de 0,5 m/s chaque seconde, au bout de 4 s elle sera égale à $0,5 \times 4 = 2$ m/s). On en déduit que $v_{\text{moy}} = (\gamma \times t) / 2$ ou $1/2 \times \gamma \times t$ ou encore $1/2 \gamma t$.

Conséquence du théorème de la vitesse moyenne

Pour un corps partant du repos et uniformément accéléré, la distance D parcourue au bout du temps t étant égale à $v_{\text{moy}} \times t$ et v_{moy} étant égal à $1/2 \gamma t$, cette distance parcourue est égale à : $(1/2 \gamma t) \times t$ soit encore $1/2 \gamma \times t^2$, c'est-à-dire $1/2 \gamma t^2$ (loi de la chute des corps).

Autrement dit, si l'accélération est uniforme, les distances parcourues augmentent comme le carré des temps mis à les parcourir : $D = k t^2$.

Suite p.16

Lorsqu'on l'applique aux accélérations discrètes, l'erreur relative commise sur la valeur de la vitesse moyenne diminue avec l'augmentation du nombre de paliers. Ainsi, dans le cas de la figure 3, la vitesse moyenne réelle (1,5 m/s) est supérieure de 0,5 m/s à la vitesse moyenne calculée comme étant égale à la moitié de la vitesse maximale (c'est-à-dire $2/2 \text{ ms}^{-1}$), soit 1 m/s. Dans l'exemple de la figure 4, la vitesse moyenne ainsi calculée ($6/2 \text{ ms}^{-1} = 3 \text{ ms}^{-1}$) est également inférieure de 0,5 m/s à la valeur réelle de v_{moy} (3,5 m/s). Mais on voit que si l'erreur absolue ne change pas (elle est toujours de 0,5 m/s), l'erreur relative n'est plus que de $0,5/3 = 0,17$ (17%) au lieu de $0,5/1$ (50%). Elle diminue ainsi avec le temps, à mesure que la vitesse maximale augmente.

Par ailleurs, l'erreur relative sur la distance parcourue passe, dans les exemples considérés, de $((1,5 \times 2) - (1 \times 2)) / 3 = (3-2) / 3 = 0,33$ (33%) pour la figure 3 à $((3,5 \times 6) - (3 \times 6)) / 21 = (21-18) / 21 = 0,14$ (14%) pour la figure 4 et $((6,5 \times 12) - (6 \times 12)) / 78 = 0,08$ (8%) pour la figure 5. Elle ne serait plus que de 3% au bout de 30 secondes (vitesse moyenne réelle : 15,5 m/s ; vitesse calculée : 15 m/s ; distance parcourue au bout de 30 s : 465 m) : $((15,5 \times 30) - (15 \times 30)) / 465 = (465 - 450) / 465 = 0,03$ (3%). De même, l'erreur relative sur la distance parcourue serait de 3% au bout d'un temps quelconque si l'accélération s'était faite par 30 à-coups.

Enfin, la différence entre les deux modes de calcul de la vitesse moyenne et de la distance parcourue vient aussi du fait que dans les exemples précédents, on ne part pas d'une vitesse nulle quand on considère les accélérations discrètes : $v_{\text{moy}} = (v_{\text{min}} + v_{\text{max}}) / 2$, avec $v_{\text{min}} \neq 0$. ■

Si, au lieu de partir du repos, le corps a déjà une vitesse initiale v_0 , puis se trouve uniformément accéléré, la distance totale parcourue D est égale à $1/2 g t^2 + v_0 t$. Si enfin, le mobile avait déjà parcouru une distance D_0 au départ, la distance totale parcourue est $D = 1/2 g t^2 + v_0 t + D_0$ (ou $x = 1/2 g t^2 + v_0 t + x_0$, si x et x_0 désignent respectivement l'abscisse à l'instant t et à l'instant $t = 0$). C'est la loi générale des mouvements uniformément accélérés.

Relations avec le calcul intégral

On a vu que l'erreur que l'on fait lorsqu'on calcule la distance parcourue par un mobile en accélération uniforme en considérant des accélérations brutales (« discrètes »), diminue avec le nombre de paliers. Cette distance parcourue est égale à la somme des petits rectangles (par exemple dans les figures 2 à 5), c'est-à-dire à la somme des distances parcourues chaque seconde et représentées par les aires unitaires, égales à la vitesse à l'instant t multipliée par l'intervalle de temps pendant lequel cette vitesse est constante ($v \times \Delta t$). Lorsque le nombre de paliers augmente ou, ce qui revient au même, lorsque l'intervalle de temps pendant lequel la vitesse est constante, diminue (on écrit dt au lieu de Δt), la somme des $v \times dt$, comme on l'a vu plus haut, tend vers : $1/2 v_{\text{max}} \times t$ soit $1/2 \gamma t \times t (= 1/2 \gamma \times t^2)$

Ce principe est utilisé dans le calcul intégral où l'on considère, dans le cas présent, une accélération uniforme comme une infinité d'accélérations brutales par unité de temps. La distance parcourue D , représentée par l'aire du triangle rectangle de la figure 7, est égale à la somme de petits éléments de surface dD , infiniment étroits, chacun égal à $v \times t$: on écrit $D = \int dD = \int v \times dt = \int \gamma t \times dt = \gamma \int t dt$.

Les mathématiques nous apprennent qu'au bout du temps t , cette somme est égale à $\gamma t^2/2$ ou $1/2 \gamma t^2$. Cette expression correspond en effet à la primitive de la fonction $v = \gamma t$, et toute primitive est matérialisée par l'aire située sous la courbe représentative de la fonction en question.

Suite p.16